# Enoncé

**Remarque :** Le premier exercice est repris de la corbeille. Cet exercice étant une preuve de NP-Complétude comme on en fera tout au long de ce Workshop, il est fondamental d’avoir compris cet exercice. Si vous n’avez pas réussi à le terminer en autonomie, vous pouvez commencer par cet exercice. Sinon, passez directement à l’exercice 2.

1. Considérons les deux problèmes Cycle Hamiltonien et Chaine Hamiltonienne.

Cycle Hamiltonien

*Données* : un graphe non orienté *G*.

*Question* : *G* contient-il un cycle hamiltonien ?

Chaine Hamiltonienne

*Données* : un graphe non orienté *G*, deux sommets *u* et *v* distincts de *G*.

*Question* : *G* contient-il une chaine hamiltonienne entre *u* et *v* ?

Supposons que le problème Cycle Hamiltonien est NP-Complet. Il faut prouver que Chaine Hamiltonienne l’est aussi. Pour cela, il faut montrer que le problème Chaine Hamiltonienne est dans NP (donc que la validité d’une solution peut être vérifiée en temps polynomial), et qu’il est NP-Difficile (au moins aussi difficile que n’importe quel problème de NP). Puisqu’il est parmi les problèmes les plus durs de NP, il est NP -Complet.

Rappel : La différence entre une chaine et un cycle est qu’un cycle revient à son point de départ.

1. Montrer que le problème Chaine Hamiltonienne est dans NP :

Considérez :

* une instance ICH du problème Chaine Hamiltonienne, constituée du graphe *G*=(*V*, *E*)
* une suite de sommets SCh = {*u*1,…, *un*} de *V*.

Proposez un algorithme qui prend en entrée ICh et SCh, et qui vérifie si SCh est une chaine hamiltonienne. Prouvez que la complexité asymptotique de cet algorithme est un polynôme de la taille de ICh.

1. Montrez que le problème Cycle Hamiltonien se réduit polynômialement au problème Chaine Hamiltonienne :

Considérez un algorithme qui prend en entrée une instance ICy du problème Cycle Hamiltonien, constituée du graphe *G*=(*V*, *E*), et qui retourne l’instance ICh du problème Chaine Hamiltonienne constituée :

* du graphe *G’* obtenu en ajoutant à *G* un sommet *v*, et en le connectant à tous les voisins d’un sommet *u* choisi arbitrairement dans *G*
* des deux sommets *u* et *v*

Dans l’exemple suivant, le sommet choisi pour transformer ICy en ICh est *u* :

ICy

ICh

* + 1. Montrez que la complexité asymptotique de cet algorithme est polynômiale.
    2. Montrez que s’il existe une chaine hamiltonienne de *u* à *v* dans *G’*, alors il existe un cycle hamiltonien dans *G*.

Dans l’exemple précédent, une solution possible à l’instance ICh du chemin hamiltonien entre *u* et *v* est (*u*, *a*, *b*, *c*, *d*, *v*), et une solution possible à l’instance ICy du cycle hamiltonien est (*u*, *a*, *b*, *c*, *d*, *u*), qui est obtenu en remplaçant *v* par *u* dans la solution de ICh.

**Attention :** Cet exemple sert à illustrer le raisonnement, le but n’est pas de démontrer l’existence d’un cycle dans ce graphe en particulier, mais dans tout graphe obtenu par la transformation présentée au-dessus à partir d’un graphe quelconque.

* + 1. Montrez que s’il n’existe pas de chaine hamiltonienne de *u* à *v* dans *G’*, alors il n’existe pas de cycle hamiltonien dans *G*.

Concluez que le problème est NP-Difficile.

1. Considérons le problème de décision Chevaliers De La Table Ronde suivant :

Chevaliers De La Table Ronde

*Données* : *n* chevaliers, la liste de toutes les paires de chevaliers ennemis.

*Question* : Existe-t-il un placement des chevaliers autour de la table ronde qui évite à deux chevaliers ennemis d’être assis l’un à côté de l’autre ?

Montrer que le problème Chevaliers De La Table Ronde est NP-Complet.

Un indice : Représentez chaque chevalier par un sommet, et le fait que deux chevalier ne soient pas ennemis par une arête entre les deux sommets correspondants.

Un autre indice : Vous connaissez déjà le problème à utiliser pour la réduction polynomiale.

Juste démontrer qu’il existe un cycle hamiltonien

1. Considérons le problème Voyageur De Commerce :

Voyageur De Commerce

*Données* : Un graphe complet *G* arêtes-valué, et un entier *k*.

*Question* : Existe-t-il un circuit passant au moins une fois par chaque sommet de *G* et dont la somme des valeurs des arêtes est au plus *k* ?

Montrer que Voyageur de Commerce est NP-complet.

Existe-t-il

Somme arrête du circuit <= k

1. Considérons le problème Voyageur De Commerce Incomplet :

Voyageur De Commerce Incomplet

*Données* : Un graphe *G* arêtes-valué, et un entier *k*.

*Question* : Existe-t-il un circuit passant au moins une fois par chaque sommet de *G* et dont la somme des valeurs des arêtes est au plus *k* ?

Montrer que Voyageur de Commerce Incomplet est NP-complet :

1. Trouver un moyen de transformer une instance de Voyageur De Commerce Incomplet en une instance de Voyageur De Commerce.
2. Quelle propriété particulière vérifie le graphe obtenu, plus particulièrement les distances ? Peut-on conclure de la NP-Complétude de Voyageur de Commerce celle de Voyageur De Commerce Incomplet ?
3. Adapter la démonstration de la question 3. et conclure.